Uncommonly accurate energies for the general quartic oscillator: Supplemental Information

Pavel Okun, Kieron Burke
Department of Chemistry, University of California, Irvine, CA 92697, USA and Departments of Physics and Astronomy and of Chemistry
(Dated: Tuesday 10th November, 2020)

n	$\lambda = -1$	$\lambda = 0$	$\lambda = 1/2$
0	0.6209270298257486608580357329871206982000	0.4208049744754477632073387069472240693432	0.2969675302972151588212005493833645945082
1	2.0259661641666569970850703427960975727209	1.5079012411604822141183717271129771258040	1.2083664545337553244675128781490877007052
2	3.6984503193780828535724670322135994784906	2.9587956874793210438093895440143405907473	2.5549656461358335669363203892249780748117
3	5.5575771385568190043356690869633769327987	4.6212203186659158345199462032646287773490	4.1185132911873791789827356847060866472967
4	7.5684228735599952483040236007700297795874	6.4535099323116714688390801378688895232907	5.8615290772456843939267326829532388801763
5	9.7091478766133491585283420979384357791199	8.4284538781251624410812759084851264487491	7.7535437904317968231655053084272429114240
6	11.9645436206307893693476637072524067567336	10.5278307660214238235047658353664143415435	9.7748772610230392914052115941944564574 52
7	14.3232651989715130212955084127970016404927	12.7383369432737903427451672925556149750443	11.9112456942270964580082777754683535757181
8	16.7764527862477299481795270148716610404336	15.0497529310262142774202965577869187310261	14.1517497832384947562615037963742371519444
9	19.3169543039861738015603041224460630143480	17.4539341576043532672221679689954879136362	16.4877481831099757519730264219436557939311
10	21.9388493623736883118412614839274832048677	19.9442078219410104858697265744541155274941	18.9121913414809377170587410723808518620447
11	24.6371393784850827234483399467490277731788	22.5149877684426714142542318593734791245252	21.4191988384016334155749968573601998934125
12	27.4075361599007733167185785640547638285198	25.1615158711766884276146901754352125654444	24.0037771856458996617329273486803658710224
13	30.2463121638354802813346902742580711908208	27.8796812841877656582298671760453383565028	26.6616235644061192930466358802950389698173
14	33.1501911449899797647855437419461171831573	30.6658899335127314628439893169538951067637	29.3889847264493968907502226461423327368738
15	36.1162662359316612997904513472041145489241	33.5169677028528987634937196368642936314747	32.1825527201796215069940450096463713573417
16	39.1419372382007939004180627624271107209340	36.4300869553098956349617834567278369397641	35.0393860174731882492006918400771100061893
17	42.2248617205992722354303466637426801349502	39.4027096653309522764323911075252220491304	37.9568486543314530223356956562434008727611
18	45.3629162655749501221305299308397198651343	42.4325426544203398670711200468442512975238	40.9325624549159822838446125803113988960005
19	48.5541653210865955322219587604320298774269	45.5175018286087836091156740676820857337808	43.9643689568979728052340425260495584501329
n	$\lambda = 1$	$\lambda = \lambda_c$	$\lambda = 2$
0	0.1472351400900356499691248977564660173258	-0.0000000000000000000000000000000000000000	-0.2995213674158870148305588119678013665817
1	0.8722611979074849376077725041342821484402	0.5716588679960030376877118960876601938386	0.0463710822278322225551254617719892396217
2	2.1279787487595877045538224256388430610159	1.7736948620145091772993229646471235886632	1.2279728124733779318126911954478247721008
3	3.5910891429085531474677426173361466615617	3.1528326580224174810921481032323232487809	2.4598414289848618278734212356647449784682
4	5.2451344076798266430684130776728360862553	4.7363694975061665860330732922691834287200	3.9382169668923261066022151910142706869605
5	7.0543309765744167117016069821477629262677	6.4796199486673050896924411810029763381620	5.5812919464200356086062138581050168522645
6	8.9977152866347239207805152219715373495070	8.3609827938705988454021151460423261599059	7.3688888891530412336227399929097153100735
7	11.0600197362083473113526351645076563394713	10.3643546811859909563918554922259918339922	9.2832226299648908948309227497618828073426
8	13.2296716965972822290602839111253872627 57	12.4776265015870503319630402009506998689629	11.3113496812053433661018404740221218764899
9	15.4975367732762450862155724272143845256796	14.6912708225153021462064097897940203073039	13.4431253746146181822961187485295612840726
10	17.8561912029006493999576787885895573682737	16.9975664549772044605549383045427198392948	15.6703699687296553967537802445771571591652
11	20.2994620601279773169062848753786930728930	19.3901082427550754621639190325828280149029	17.9863231152929266903954684521570229693708
12	22.8221217502876403219503896506332221428776	21.8634828235108640404426731524651415625608	20.3852887904825910828332734073819599201359
13	25.4196764022940486530210893302948537481785	24.4130447540232097527558401520261731285525	22.8623916753093559460983299855869625178436
14	28.0882142843477951830862545628663297491065	27.0347565735505259647623769404174440869892	25.4134040381637348805306139183152990003897
15	30.8242941384532552138898486648626838905608	29.7250712630490587442470044304579531460627	28.0346190393585560070298786629180414903382
16	33.6248609575586778848715479117742888261600	32.4808437755606569236339263329500479754022	30.7227557029688189378854855857924222071042
17	36.4871811657174959586755707609740381069210	35.2992630749155671032364812414301202000714	33.4748861345856088549750625423586830442841
18	39.4087918519281065606950050769764515801679	38.1777989988783344057067262022906053148024	36.2883787630669702226446175430707502923971
19	42.3874603986599763607484603391513404125215	41.1141600671899623565300558968349506123263	39.1608533771374500623766820576210674574060
n	$\lambda = 4$	$\lambda = 8$	$\lambda = 16$
0	-2.6614480668299258763230139306673458375429	-14.0324444018052994432537497688658953282978	-61.1873976097239347040519514878376408475110
1	-2.6517317169216879626798264247619112670590	-14.0324443753846106821056639056976599894887	-61.1873976097239347040519507432046834481584
2	-0.5102930381327473696110504044071024379800	-10.2374181022536577826397549201626978893469	-55.6270328066566950481384614788601681896687
3	-0.1807894330622582818165542233132232566996	-10.2374126036757771174222559086720970290432	-55.6270328066566950481379569833156389101676
4	1.1695143365947340664211154850717789208582	-6.6843927138660009112120807253579250040901	-50.1677907702224152602395145875345725833160
5	2.3643918923460492284769310044183117645863	-6.6839252868713098232048203999239475485623	-50.1677907702224152600774529069586335173511
6	3.8357948326004093266558747356504382940929	-3.4521491483210872751782055732716385290964	-44.8154388106509680002392073351225222773039
7	5.4430045231550815592562510060115461795846	-3.4323617805610231231123996788750204987627	-44.8154388106509679674606247338249029676026
8	7.1832349741044744228694202343455748298609	-0.8436487231434934433791826110408175496539	-39.5766864040676713567900013956791558340159
9	9.0398481121463461930986519520826284005100	-0.5042404268290690707095844038061155129498	-39.5766864040676666831144013830302553496714
10	11.0025188337220857851315919678616051381955	1.1615932648322248170487151971678725823886	-34.4594623366015919928440409675286441966089
11	13.0627969100066585323849398998537049950316	2.3918554218704864477402234706269532999536	-34.4594623366010937848302698406235040845512
12	15.2137826575078115399041761005777164302396	3.9821840692096918952249865418185404041377	-29.4733189381534883371911762187717947850975
13	17.4496779348669813230194759912660986824602	5.6581105244767300215025449175194901075413	-29.4733189381124209160128178684499808471623
14	19.7655245277330684324543398617660707059238	7.4555769375507348817071475302379978220562	-24.6300488773159008572118670474641144980755
15	22.1570215163914948104597068950418213904794	9.3507619349088529032629887250749107416157	-24.6300488746474233947975266198680141507504
16	24.6203946769103286322488223100432640789732	11.3367520808885588886234641628154072096683	-19.9446824518702288293797651016978129099597
17	27.1522997333404608833611045353925571172 27	13.4065360556998380563145435100523133286453	-19.9446823139694465593687674516291436652453
18	29.7497488149246926808474288802922162419641	15.5547993768313120592069318313123633281790	-15.4372324690911890964651244057502958813076
19	32.4100533460587587533833010330720289301049	17.7770953113984742550117244948104017128921	-15.4372268038006350393996616788105217144393

TABLE S1. Exact energies given to 40 digits.

n	$\lambda = 0$	$\lambda = \lambda_c$	$\lambda = 4$	$\lambda = 8$
0	$-9.7588252368918194861531575958132027216984 \times 10^{-01}$	$-8.9891335378216959429748135104379263992213 \times 10^{-01}$	$2.6366736960904910080338141237575471683707 \times 10^{-01}$	$-1.2284345041748225948485885350411922442056 \times 10^{-02}$
2	$-2.1710763920798390016468830973743157043024 \times 10^{-01}$	$-4.1893751204555503433953849279983557892984 \times 10^{-01}$	$5.9525613945048726688710745173110956505724 \times 10^{-01}$	$-9.5000561727618961112074124321497315955482 \times 10^{-02}$
4	$-2.2261890633146942297495023994167441677613 \times 10^{-02}$	$-1.2754928931029004588560371047300404192716 \times 10^{-01}$	$6.3755092396869292512676919553577799959564 \times 10^{-01}$	$-2.8895050102284264633264692648801269419409 \times 10^{-01}$
6	$4.5591557787546429705804003601242237486974 \times 10^{-03}$	$-1.2197224794254465950455087492124630583470 \times 10^{-02}$	$3.9252576753721657029342146416395277347336 \times 10^{-01}$	$-5.1751005800289649992548077856145587327207 \times 10^{-01}$
8	$1.0525477149971613425352573771627949721315 \times 10^{-03}$	$5.2238031507692678188583838891905615620312 \times 10^{-03}$	$1.2426035934929888629492095903427597771632 \times 10^{-01}$	$-6.0644761277763321830852528870076142585510 \times 10^{-01}$
10	$-2.9103720020779682673437831128086393462750 \times 10^{-04}$	$1.0415337942402997588758229945604233264700 \times 10^{-03}$	$4.5218782880604521880565599178279919182618 \times 10^{-4}$	$-4.7036546674350963606011473974687141511015 \times 10^{-01}$
12	$-4.4315556015676489960413529539763509157754 \times 10^{-05}$	$-4.1366570716572072358700463224198391959064 \times 10^{-04}$	$-1.2548603768400798394430043971321101311319 \times 10^{-02}$	$-2.2049343759930470715570650167306954763487 \times 10^{-01}$
14	$2.7385266752839770313829213703535806999331 \times 10^{-05}$	$-6.1195308111003926284232317755775636245208 \times 10^{-05}$	$-1.2175962201115102957708710468681604815135 \times 10^{-03}$	$-3.4987244075933380837161542327009269932314 \times 10^{-02}$
16	$-7.9795051736373767819752776251262980100650 \times 10^{-07}$	$4.5775803526838129469539954283393712137855 \times 10^{-05}$	$1.4642210813276674071071389312089900357357 \times 10^{-3}$	$2.2679742539034376005681249911459389846413 \times 10^{-02}$
18	$-2.3255573994102993778937068556143188251051 \times 10^{-06}$	$-7.3856649473612454176961564069524459383129 \times 10^{-07}$	$1.0184874757133244100699395435973076163382 \times 10^{-04}$	$1.1288188541125057476075179217375706247192 \times 10^{-02}$
20	$6.0405679973221260534531213171483279655685 \times 10^{-07}$	$-4.8304782500867527035471627264981826180864 \times 10^{-06}$	$-2.0291462118463796953113826820587548801465 \times 10^{-04}$	$-2.0872973146669747780267890506998273648440 \times 10^{-03}$
22	$8.8908424687998948857843126583955387567507 \times 10^{-08}$	$1.1391556241250729079831506137187730517943 \times 10^{-06}$	$1.1971425631666171747637084065481945348537 \times 10^{-05}$	$-2.1611523559764022566630973228900028755257 \times 10^{-03}$
24	$-9.1179059386670698706017409888235839985727 \times 10^{-08}$	$3.0282068165362269340638867139270623603811 \times 10^{-07}$	$2.7253159877626026184652046424695602473164 \times 10^{-05}$	$3.2641654407826534784672309359832959707374 \times 10^{-04}$
26	$1.7156823987605295867673461189168296473864 \times 10^{-08}$	$-2.2650031555948765329240285593413319168973 \times 10^{-07}$	$-7.2642193953197722988401484963607687076995 \times 10^{-06}$	$3.8984304686928272732587820030098062386320 \times 10^{-04}$
28	$5.4977888943382273070125919731874506339984 \times 10^{-09}$	$2.7279610628244718735068998902616798396469 \times 10^{-08}$	$-2.5161581959913066855075598093168741264401 \times 10^{-06}$	$-9.2021897613604714608495654249965283354249 \times 10^{-05}$
30	$-4.0388146366596254001705595403162371603752 \times 10^{-09}$	$2.2222391095621187887681361282250184444194 \times 10^{-08}$	$1.8055794560507756604150809656607793751033 \times 10^{-06}$	$-6.4247385262771323412930234669178431327181 \times 10^{-05}$
32	$7.3684474749356136042733998470002895607617 \times 10^{-10}$	$-1.1376224207158825654152478462343844353211 \times 10^{-08}$	$-1.0521733326394967485197840802108532222554 \times 10^{-07}$	$2.8212657952347910390642783268812842942531 \times 10^{-05}$
34	$2.6740668465809183846623078834803341489088 \times 10^{-10}$	$8.3821985504034972912328250210051901968154 \times 10^{-10}$	$-2.6890442021974607708050558892611841751208 \times 10^{-07}$	$7.4643427755618958336463449927503457702870 \times 10^{-06}$
36	$-2.0798818500045227492292783430143920452527 \times 10^{-10}$	$1.3872207993743820800331787791897246292561 \times 10^{-09}$	$1.0686500064662085219943334421592023503579 \times 10^{-07}$	$-7.4024081291889180641596440716166115949559 \times 10^{-06}$
38	$4.6750232067405078860334127973060710523926 \times 10^{-11}$	$-6.7312113379401529404366647382616103264719 \times 10^{-10}$	$9.4134816393796881142710890769561810455547 \times 10^{-09}$	$3.1337303496364493150989674436562304320167 \times 10^{-07}$
40	$1.0834231779096182435629173430718530734598 \times 10^{-11}$	$5.6445347676440645232387553843689740190894 \times 10^{-11}$	$-2.2497111453004683246952298066210992613525 \times 10^{-08}$	$1.4657200161976769829131116181528658839241 \times 10^{-06}$
42	$-1.1804012724863719142258770641850184199093 \times 10^{-11}$	$8.4513339069423978325585966951633469717546 \times 10^{-11}$	$7.0112465042242994476359889505080886579693 \times 10^{-09}$	$-5.0792512169456612192938704249127082757261 \times 10^{-07}$
44	$3.6446703035983857136480428392440509048217 \times 10^{-12}$	$-4.6250120316613473914740404393564172755806 \times 10^{-11}$	$1.3175193361307386595255334954723142852777 \times 10^{-09}$	$-1.5139847616210827108984068392399353334543 \times 10^{-07}$
46	$1.7820180084804597938509676321954224932726 \times 10^{-13}$	$6.6607539904795598464437339140823074175625 \times 10^{-12}$	$-1.8688186122189692243402082161711037482029 \times 10^{-09}$	$1.6292818459599496379728276970632111556577 \times 10^{-07}$
48	$-6.7323056188590048204487590458721334061366 \times 10^{-13}$	$4.8271453135694179799755446230637597320208 \times 10^{-12}$	$5.6143648258895084734587229767659874172269 \times 10^{-10}$	$-2.5911612501156841882043765253158432835112 \times 10^{-08}$
50	$2.9833397203797698473932496978475949436735 \times 10^{-13}$	$-3.4579657783968680919121203317145856198250 \times 10^{-12}$	$1.0958824100429981692906327559738487299334 \times 10^{-10}$	$-2.6449082975155940565903578730768763489912 \times 10^{-08}$
52	$-3.5512503186487994528766855486751303002979 \times 10^{-14}$	$8.3026331317981105849033659810559746759409 \times 10^{-13}$	$-1.6087404675025286880227701545294437871295 \times 10^{-10}$	$1.6420563550529854102467275273828539016937 \times 10^{-08}$
54	$-3.2911846474186238511973288988143153936309 \times 10^{-14}$	$2.0903546439867351150332746937816349239262 \times 10^{-13}$	$5.4626174912812805360297127362063299676167 \times 10^{-11}$	$-8.0617048897031989578112472742015275930887 \times 10^{-10}$
56	$2.3231861879176994112022830553338399266214 \times 10^{-14}$	$-2.5848182361169422886679199715570037936389 \times 10^{-13}$	$5.8132501440743133664051797346823869967792 \times 10^{-12}$	$-3.4316970166708484129842490665767423867353 \times 10^{-09}$
58	$-6.4593999639108647230639217868283910755797 \times 10^{-15}$	$9.5537482294158070174328908989056422660877 \times 10^{-14}$	$-1.4051708950879115906795572038361989532930 \times 10^{-11}$	$1.7192318007587832279717516991927567901671 \times 10^{-09}$
60	$-6.9325243632049375843603880680769856547413 \times 10^{-16}$	$-1.9045609695393518011981035090993673896733 \times 10^{-15}$	$5.9669769807247903069744423578090572314474 \times 10^{-12}$	$1.3316873580855187750074738375862056961619 \times 10^{-11}$
Norm. Error	$2.981756840031728465318268238576759389575 \times 10^{-30}$	$3.9882215351120094379193997210890776195050 \times 10^{-28}$	$1.8720770271652866139815322043394623283636 \times 10^{-24}$	$2.1272947859720467040290652122039873518905 \times 10^{-19}$

TABLE S2. The expansion coefficients of the ground state for several values of λ calculated with [2/200]. The normalization error is defined as Norm. Error $= 1 - \sum_{n=0}^{30} c_{2n}^2$. All entries are accurate for all digits shown.

λ	$\langle p^2 \rangle$	$\langle x^2 \rangle$	$\langle x^4 \rangle$	$\langle p^2 \rangle + \lambda \langle x^2 \rangle - \langle x^4 \rangle$
-1	0.7096226227100469481631566194263998413 5924	0.3548402511728537989426730736692832687 2234	0.3547823715371931492204835457571165726 3690	-1.0×10^{-69}
0	0.5610732993005970176097849425962987591 2425	0.4561199557475526641256899933648862445 3373	0.5610732993005970176097849425962987591 2425	-3.8×10^{-68}
$\frac{1}{2}$	0.4859528307699720205700377034847489487 3410	0.5399767422421108528506218258415769363 3932	0.7559412018910274469953486164055374169 0376	-3.2×10^{-66}
1	0.4187530837851372469188082762110309920 9885	0.6673186909952691408799252376072289069 9352	1.0860717747804063877987335138182598990 9236	9.6×10^{-67}
λ_c	0.3828873103080074922958274990826921983 8526	0.8214946617678035559023407522345874736 335	1.5315492412320299691833099963307687935 4117	0.0×10^{-40}
2	0.4053838252136776248416818423552329917 3570	1.2071184726522904669236403874684522207 6689	2.8196207705182585586889626172921374332 6949	1.2×10^{-63}
4	1.2230281089307221874777090074706238431 2444	3.5787191485279675169312956862703137198 8625	15.537904703042592255202891752551878722 66944	9.7×10^{-60}
8	1.9338080507759280874729411402823578032 8191	7.7414002199436227544292278120388318403 7962	63.865009810324910122906763636593012526 31885	-1.6×10^{-51}

TABLE S3. Testing the virial theorem on the ground state in the basis [2/200] for various λ.

λ	ϵ_{ZP}	$\Delta\epsilon$
-1.0	0.6209270298257486608583057329871206982000 2	$1.4050391343409083362270346098089768745208 \times 10^{-0}$
-0.9	0.6029963222696462884479823139357906411641 2	$1.3751166990600236139114185321635452644040 \times 10^{-0}$
-0.8	0.5846740740133447885844669819336398988428	$1.3448018746401551940280748998539462115265 \times 10^{-0}$
-0.7	0.5659376866720897331138981869210652434509 9	$1.3140853140631193365254355121211365308478 \times 10^{-0}$
-0.6	0.5467625672840826386406741013004685482152	$1.2829578098203442558192144577403628641190 \times 10^{-0}$
-0.5	0.5271218991063171894816084747522551160055	$1.2514103967290150110732296148266232837839 \times 10^{-0}$
-0.4	0.5069863809481881888729540034905996396077 6	$1.2194344778284042769140563256722639977853 \times 10^{-0}$
-0.3	0.4863239302177912571465126582585229539974 3	$1.1870219779052869196890031652748767144085 \times 10^{-0}$
-0.2	0.4650993440924516521804865217974199202322 5	$1.1541655300384905427168316854046433487992 \times 10^{-0}$
-0.1	0.4432739123567471473120284474169745661133 9	$1.1208587015272327908233317548892182205668 \times 10^{-0}$
0.0	0.4208049744754477632073387069472240693431 9	$1.0870962666850344509110330201657530564608 \times 10^{-0}$
0.1	0.4001454123904991501565520289505700449673 2	$1.0528745352429691823424756146892005253677 \times 10^{-0}$
0.2	0.3837430693687179277484300039933618090569 2	$1.0181917465029299214242205320914791197489 \times 10^{-0}$
0.3	0.3715400840198463058896098268623189353254 9	$9.8304854088319486418257971399998175236849 \times 10^{-1}$
0.4	0.3634721274259981729856178995251197038294 5	$9.4744852204198535827549906077458178738227 \times 10^{-1}$
0.5	0.3594675302972151588212005493833645945081 6	$9.1139892423654016564631232876572310619703 \times 10^{-1}$
0.6	0.3594462863937044346282079624424387599154 3	$8.7491140078599896968941055709766129850312 \times 10^{-1}$
0.7	0.3633189184440119822044058119272681036034 5	$8.3800295015483345935974872247581416559151 \times 10^{-1}$
0.8	0.3709851939082107385374467736810932609061 9	$8.0069699579858230964730291789504576910103 \times 10^{-1}$
0.9	0.3823326808722830502963045855134894431594	$7.6302463383245331359843389987475231600721 \times 10^{-1}$
1.0	0.3972351400900356499691248977564660173256	$7.2502605781744928678364760637781613111446 \times 10^{-1}$
1.1	0.4155507590528485026967929386263402747515	$6.8675216115574772785403996013260132180676 \times 10^{-1}$
1.2	0.4371202497286486913192126308719687873333	$6.4826630296005290613509983024275992615350 \times 10^{-1}$
1.3	0.4617648554513758383222167107250112808877 1	$6.0964620058917679728128761061240051872668 \times 10^{-1}$
1.4	0.4892843468138093252618434658957806554081 5	$5.7098587881161888311010534076421846183981 \times 10^{-1}$
1.5	0.5194551336220102692835478095431054721775 8	$5.3239755938515668689983574067719278771953 \times 10^{-1}$
1.6	0.5520286812739345614625871677293516471269 2	$4.9401331434894835185037107761821939227067 \times 10^{-1}$
1.7	0.5867304939898976359329747469702822304568 8	$4.5598623271756178977257728951253039247290 \times 10^{-1}$
1.8	0.6232600078226618745031198364961968051809 8	$4.1849076971005900299967590231490230188190 \times 10^{-1}$
1.9	0.6612918089766122103471107367154987902592 5	$3.8172187430012034691909211233590839964834 \times 10^{-1}$
2.0	0.7004786325841129851694418803219863341833	$3.4589244964371923738568427373979060620339 \times 10^{-1}$
2.1	0.7404565675179354355629774996687695452010 4	$3.1122872787829673232852391573241979544497 \times 10^{-1}$
2.2	0.7808527521053819857854837304745112142112 6	$2.7796327774199604817854862992449978000166 \times 10^{-1}$
2.3	0.8212955606174532218265850921082130275140 9	$2.4632564354606722765049741839955396695579 \times 10^{-1}$
2.4	0.8614268509413552144781574720424095729840	$2.1653103753875066326339072313185707851793 \times 10^{-1}$
2.5	0.9009153288444045142403127106767991045011 9	$1.8876801593314337098477735325258520829547 \times 10^{-1}$
2.6	0.9394696124581847450493459761514448462733 9	$1.6318653348952627884979765105200671202821 \times 10^{-1}$
2.7	0.9768493248334844117801403427934224784654 7	$1.3988802033057390329223388125239158098869 \times 10^{-1}$
2.8	1.0128726509155383073457545652026633199520 5	$1.1891901003987891328858434406118046691496 \times 10^{-1}$
2.9	1.0474193070791550169973996872011949893585 4	$1.0026933176210712058637366222793647465800 \times 10^{-1}$
3.0	1.0804286694168041956843113185926627787675	$8.3875078659544046104422960854141328549576 \times 10^{-2}$
3.1	1.1118936534977801489483572061313985249734 8	$6.9625719425334852972642078483686106686743 \times 10^{-2}$
3.2	1.1418515780434133770673078278297023830521 9	$5.7374082131274903868486094877790640131769 \times 10^{-2}$
3.3	1.1703735278065649238427427163110719084815 2	$4.6947665787295806496556615913278874617551 \times 10^{-2}$
3.4	1.1975536411713405844118253513516852861762 6	$3.8159830575992726850779420745286423643317 \times 10^{-2}$
3.5	1.2234994092691067949100977379106553891110 9	$3.0819769492830925530425153918943404031434 \times 10^{-2}$
3.6	1.2483236324903709797712305844140953928066 4	$2.4740615018333114186125336647150711310158 \times 10^{-2}$
3.7	1.2721382731621168844871383737947435601718 9	$1.9745452707883447866585594904011205567527 \times 10^{-2}$
3.8	1.2950501405666453467324252449178011976683 8	$1.5671325524158315378419332481735730221177 \times 10^{-2}$
3.9	1.3171581640135163986525569171362158759862 3	$1.2371500431668495730106131763125365198563 \times 10^{-2}$
4.0	1.3385519331700741236769860693326541624570 8	$9.7163499082379136431875059054345704839343 \times 10^{-3}$
4.1	1.3593111804028073031842613726798364279201	$7.5932074094905055157187782958462932145716 \times 10^{-3}$
4.2	1.3795059163675298113061887970396478104816 7	$5.9055187708652852174274643546950108377511 \times 10^{-3}$
4.3	1.3991969838385609073091239536091030513653 3	$4.5715551589515568970514585700712973116190 \times 10^{-3}$
4.4	1.4184368507035477182488343465002391768889 3	$3.5228931453146243630821718978213512658769 \times 10^{-3}$
4.5	1.4372705131503626300222315506862829397464 3	$2.7028124016803728740771084600651645279280 \times 10^{-3}$
4.6	1.4557364211277761812762686616457748816906 2	$2.0647151777248071188829247572436858948968 \times 10^{-3}$
4.7	1.4738673697869317920395247620208789463613 3	$1.5706349720270040415072252652820979744935 \times 10^{-3}$
4.8	1.4916913238187904927517560707170937428933 9	$1.1898739683345029873121740413665681732361 \times 10^{-3}$
4.9	1.5092321579219627127934130806673816210217 3	$8.9778856323548681311254855617471183212927 \times 10^{-4}$
5.0	1.5265103076297635852228319064472006511344 6	$6.7472818643965346851187809866564543341188 \times 10^{-4}$
5.1	1.5435433317738836144826144893739238836145 9	$5.0512323352521319469615727925036261857589 \times 10^{-4}$
5.2	1.5603463920859012018491243304666937020815 6	$3.7671210909198439225958135329624669159761 \times 10^{-4}$
5.3	1.5769326577026806753511746075575983555914 4	$2.7989414843849389130603193469809827015170 \times 10^{-4}$
5.4	1.5933136432920779241281699720547008801246 7	$2.0719378468138621419557320861418463764247 \times 10^{-4}$
5.5	1.6094994896179403800715877598825096498672 2	$1.5282116884112167535087805873088229492202 \times 10^{-4}$
5.6	1.6254991949479024939769300185034069173959 2	$1.1231509218305786768051396881601758100642 \times 10^{-4}$
5.7	1.6413208050016369247957807677577713211367 5	$8.2255179762697894570370375023656230888559 \times 10^{-5}$
5.8	1.6569715682942940972819785935493794253990 7	$6.0031690599786056690293062049561302619933 \times 10^{-5}$
5.9	1.6724580628498173736524544791558239139526 4	$4.3662713149159382641171716887986553895338 \times 10^{-5}$
6.0	1.6877862994040712480304590286546386363759	$3.1649978415005754030679041765499957469812 \times 10^{-5}$
6.1	1.7029618054246569182462572398773102631102 1	$2.2865860656074198828686947575121671356759 \times 10^{-5}$
6.2	1.7179896935616238814369404624231843045239 8	$1.6465359482304028840146632006319000101076 \times 10^{-5}$
6.3	1.7328747175180173676857854256303990966757 8	$1.1817939893854221014674611055385316725886 \times 10^{-5}$
6.4	1.7476213177908457725213570953920325661256 4	$8.4550449100027037869708136352867731984463 \times 10^{-6}$
6.5	1.7622336592766012268276587239875757169333	$6.0298942490602010084911548282466379150117 \times 10^{-6}$
6.6	1.7767156623534249009806117848495024260342 5	$4.2868527685477105919919000260260566479292 \times 10^{-6}$
6.7	1.7910710287357695818679893825405294799587 4	$3.0382075670596470239716086191584004070007 \times 10^{-6}$
6.8	1.8053032631381560571976195710091028521670 9	$2.1466473231063383744483106596348708677531 \times 10^{-6}$
6.9	1.8194156915738769971252456181111528635912 4	$1.5121060000153314738892984391111778847897 \times 10^{-6}$
7.0	1.8334114769444775149407554976225090643419 1	$1.0619290128318458839696765073793069464257 \times 10^{-6}$
7.1	1.8472936324395790366076484146159312826407 9	$7.4355559422994055230904848405574087749348 \times 10^{-7}$
7.2	1.8610650331580471307641882879703436997155 6	$5.1909721677295689603051136596789990038775 \times 10^{-7}$
7.3	1.8747284262754505645655413898680076540418 0	$3.6133784326113664349515192977479612893014 \times 10^{-7}$
7.4	1.8882864400148444073293759824331036073734 1	$2.5079537135762514013924411972571341080399 \times 10^{-7}$
7.5	1.9017415916245120011357782712210127373257	$1.7357148773654877924571962961217335992384 \times 10^{-7}$
7.6	1.9150962945244328637562651655022655019737 8	$1.1978465926873801339823410252260274864434 \times 10^{-7}$
7.7	1.9283528647504861734715488533919319214288	$8.2432561597168695731282577658808280215263 \times 10^{-8}$
7.8	1.9415135267997996866903678523935455457003 8	$5.6569416417113789095064194534589161373 01 \times 10^{-8}$
7.9	1.9545804189606525155881581966924154129519 7	$3.8713296557554231694188905036612432355486 \times 10^{-8}$
8.0	1.9675555981947005567462502311341046717022 0	$2.6420688761148085863168235338809066342446 \times 10^{-8}$

TABLE S4. Zero point energy (ϵ_{zp}) and energy difference between the first excited and ground states ($\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_0$). All calculations made with [2/200].

	$\Delta E_0 \times 10^{17}$			$\Delta E_{19} \times 10^{2}$		
ω	$N_B = 40$	$N_B = 50$	$N_B = 60$	$N_B = 40$	$N_B = 50$	$N_B = 60$
1.0	$2.8316898104 \times 10^{+04}$	$7.6749053454 \times 10^{+01}$	$1.1671394475 \times 10^{-00}$	$9.7444572767 \times 10^{+02}$	$8.3352481902 \times 10^{+01}$	$1.2928179048 \times 10^{-00}$
1.1	$1.4303248620 \times 10^{+04}$	$4.6384048355 \times 10^{+01}$	$1.6780669551 \times 10^{-01}$	$4.5861040726 \times 10^{+02}$	$5.9258296585 \times 10^{-00}$	$4.6630523664 \times 10^{-01}$
1.2	$4.1469925551 \times 10^{+02}$	$9.1180293837 \times 10^{-01}$	$3.6207836723 \times 10^{-03}$	$1.5887415607 \times 10^{+02}$	$1.9298196092 \times 10^{-00}$	$1.1600275198 \times 10^{-02}$
1.3	$2.8742793086 \times 10^{+02}$	$5.2200569899 \times 10^{-01}$	$1.1126424115 \times 10^{-03}$	$2.9392576233 \times 10^{+01}$	$7.6207973910 \times 10^{-01}$	$7.3423754374 \times 10^{-03}$
1.4	$4.2356801829 \times 10^{+01}$	$2.1693812097 \times 10^{-02}$	$1.9273478687 \times 10^{-05}$	$3.3821922647 \times 10^{-00}$	$3.7361785356 \times 10^{-02}$	$4.2502441003 \times 10^{-04}$
1.5	$3.4693712760 \times 10^{-00}$	$7.5543662000 \times 10^{-03}$	$1.0429735781 \times 10^{-05}$	$3.6273522076 \times 10^{-00}$	$2.1806061116 \times 10^{-02}$	$9.1774434632 \times 10^{-05}$
1.6	$2.8212055885 \times 10^{-00}$	$7.6197300492 \times 10^{-04}$	$1.7298724883 \times 10^{-07}$	$1.4578570253 \times 10^{-00}$	$5.4608563291 \times 10^{-03}$	$1.5285380353 \times 10^{-05}$
1.7	$1.2974200122 \times 10^{-01}$	$1.3163775851 \times 10^{-04}$	$1.3929202224 \times 10^{-07}$	$1.3615884048 \times 10^{-01}$	$2.6800092716 \times 10^{-04}$	$1.0983288804 \times 10^{-06}$
1.8	$1.1692066597 \times 10^{-01}$	$3.3406363815 \times 10^{-05}$	$2.5156704460 \times 10^{-09}$	$8.3377272370 \times 10^{-02}$	$3.1402017668 \times 10^{-04}$	$5.0423268708 \times 10^{-07}$
1.9	$3.1199725859 \times 10^{-02}$	$2.6229394016 \times 10^{-06}$	$2.6472252394 \times 10^{-09}$	$5.7265477288 \times 10^{-02}$	$3.5933985680 \times 10^{-05}$	$1.6545958668 \times 10^{-08}$
2.0	$2.5175389623 \times 10^{-03}$	$1.7633090014 \times 10^{-06}$	$5.7037916005 \times 10^{-11}$	$7.4920148760 \times 10^{-03}$	$8.6795822484 \times 10^{-06}$	$1.7462304043 \times 10^{-08}$
2.1	$4.1048712013 \times 10^{-03}$	$6.5050994005 \times 10^{-08}$	$7.1374851548 \times 10^{-11}$	$2.8547336030 \times 10^{-03}$	$5.1625999631 \times 10^{-06}$	$6.0346848022 \times 10^{-10}$
2.2	$3.4060054560 \times 10^{-04}$	$1.1202439689 \times 10^{-07}$	$1.9648391489 \times 10^{-12}$	$3.0107456778 \times 10^{-03}$	$2.5349445848 \times 10^{-07}$	$6.8792884453 \times 10^{-10}$
2.3	$3.1908063319 \times 10^{-04}$	$4.1178041626 \times 10^{-09}$	$2.7238544179 \times 10^{-12}$	$5.2796166518 \times 10^{-04}$	$4.1665006440 \times 10^{-07}$	$4.8835894139 \times 10^{-11}$
2.4	$1.6416121890 \times 10^{-04}$	$8.5785121668 \times 10^{-09}$	$1.0118763143 \times 10^{-13}$	$1.7617643954 \times 10^{-04}$	$8.2250771986 \times 10^{-08}$	$3.2278123120 \times 10^{-11}$
2.5	$1.2090347328 \times 10^{-05}$	$7.7903013537 \times 10^{-10}$	$1.4704204879 \times 10^{-13}$	$2.5845945333 \times 10^{-04}$	$2.0151104609 \times 10^{-08}$	$5.1712524608 \times 10^{-12}$

TABLE S5. The error of the ground and 19th excited states calculated in bases composed of various values of ω and 40, 50, and 60 harmonic oscillator states.

λ	ϵ_0	$\epsilon_0^{(0)}$	$\epsilon_0 - \epsilon_0^{(0)}$	$\epsilon_0^{(1)}$	$\epsilon_0 - \epsilon_0^{(0)} - \epsilon_0^{(1)}$
-1	0.6209270298	0.5000000000	0.1209270298	0.1875000000	-0.0665729702
-2	0.7825872853	0.7071067812	0.0754805041	0.0937500000	-0.0182694959
-3	0.9206648830	0.8660254038	0.0546394792	0.0625000000	-0.0078605208
-4	1.0426978264	1.0000000000	0.0426978264	0.0468750000	-0.0041771736
-5	1.1530169674	1.1180339887	0.0349829786	0.0375000000	-0.0025170214
-6	1.2543454649	1.2247448714	0.0296005935	0.0312500000	-0.0016494065
-7	1.3485135506	1.3228756555	0.0256378951	0.0267857143	-0.0011478192
-8	1.4368153589	1.4142135624	0.0226017966	0.0234375000	-0.0008357034
-9	1.5202030526	1.5000000000	0.0202030526	0.0208333333	-0.0006302807
-10	1.5993998650	1.5811388301	0.0182610350	0.0187500000	-0.0004889650

TABLE S6. Comparing perturbation theory with exact results. All values are accurate to the number of digits shown.